

REALINEAMIENTO POR CAMPO MAGNETICO EN ESTRUCTURAS CILINDRICAS DE CRISTAL LIQUIDO NEMATICO

por

J. A. Martín-Pereda, M. A. Muriel y F. J. Sansa

(PUBLICADO EN LA REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS,
FÍSICAS Y NATURLES, DE MADRID. TOMO LXXV, CUADERNO 4.º)



MADRID
1981

REALINEAMIENTO POR CAMPO MAGNETICO EN ESTRUCTURAS CILINDRICAS DE CRISTAL LIQUIDO NEMATICO

J. A. Martín-Pereda, M. A. Muriel y F. J. Sansa

*Departamento de Electrónica Cuántica. E. T. S. I. T. Universidad Politécnica
de Madrid. Ciudad Universitaria. Madrid-3*

Recibido: 14 octubre 1981

En este artículo se presenta un análisis del realineamiento inducido por campos magnéticos aplicados sobre estructuras cilíndricas de cristal líquido nemático. Se analizan las dos posibles configuraciones moleculares, homeotrópica y homogénea, con campos longitudinales y transversales aplicados a ellas. Los resultados más significativos son la aparición de un campo umbral, para configuraciones homogéneas y campos transversales, y de un plano de moléculas que no sufren reorientación, para configuraciones homeotrópicas y campos transversales.

1. Introducción

El empleo de los cristales líquidos como medios aptos para visualizadores [1], transductores de imágenes [1] y moduladores y deflectores electro y magnetoópticos [2-4] ha estimulado en los últimos años una serie de trabajos relacionados con los mecanismos que gobiernan la interacción de campos electromagnéticos con las moléculas de este tipo de materiales. Las ventajas inherentes a su bajo consumo y a la gran facilidad con que pueden ser tratados hacen de este medio un candidato idóneo para su empleo en un amplio campo de otras nuevas aplicaciones. Uno de los terrenos en los que las perspectivas parecen más prometedoras, dejando aparte las ya establecidas de forma incluso comercial, es en el de las Comunicaciones Ópticas. En los últimos años se han desarrollado una serie de estructuras que permiten su inclusión dentro de los conmutadores ópti-

cos [5-6] lográndose así conmutaciones entre un par de fibras ópticas de entrada y otro de salida; estos nuevos conmutadores, con un único medio activo que es un cristal líquido del tipo nemático, ofrecen la ventaja de necesitar tensiones compatibles con cualquier circuito integrado convencional, así como un consumo energético prácticamente despreciable. Igualmente, otros grupos [7] han demostrado su posible aplicación como medios soporte de moléculas de colorante orgánico que pueden emplearse como medio láser. La ventaja de esta nueva concepción de láseres radica en el hecho de que, al depender la polarización de la radiación emitida de la orientación de las moléculas de colorante y estar ésta controlada por la posición de las del cristal líquido, gobernando a estas últimas se puede lograr, y así se ha demostrado empíricamente, gobernar a voluntad la polarización del rayo de salida. Las estructuras usadas han sido rectangulares y cilíndricas, siendo campos magnéticos los encargados del control.

Existe, igualmente, otra serie de aplicaciones dentro de las Comunicaciones Ópticas, que merece detalle aparte. Como ya es sabido, uno de los principales problemas con que se enfrenta la transmisión de señales por una fibra óptica es la del ensanchamiento de los pulsos debido a la diferencia entre las velocidades de propagación de los distintos modos. Su regeneración constituye en la actualidad tema de estudio en un gran número de laboratorios de todo el mundo, no habiéndose llegado aún a una solución aceptada de forma general. Una de las propuestas existentes se basa en el uso de estructuras cilíndricas de cristal líquido insertadas de forma periódica en la fibra. Controlando la orientación de sus moléculas y teniendo en cuenta sus propiedades anisótropas como material uniaxial, puede obtenerse una cierta reconformación de los pulsos ópticos.

Finalmente, es de señalar la introducción de los cristales líquidos dentro de la biestabilidad óptica. Este nuevo campo, cuyo auge se ha incrementado en los dos últimos años, parece ser, según todas las previsiones, en el que se va a centrar una gran parte de los trabajos de los laboratorios de Electrónica Cuántica del mundo. Entre las posibles estructuras, aparte de las planas [8], se encuentran las cilíndricas, debido a las muy especiales características que reúnen. En breve se cree se desarrollará una serie de dispositivos centrados en dichas estructuras.

De lo anterior se infiere que, si los anteriores hechos tienen una

cierta opción a convertirse en método de trabajo, una necesidad aparece clara. Y esta necesidad es la de conocer, al máximo, cuál es la influencia de campos electromagnéticos sobre las orientaciones de las moléculas de cristal líquido dentro de estructuras rectangulares y cilíndricas. Por la innegable facilidad de las primeras, la mayor parte de los estudios publicados hasta la fecha, se han centrado en configuraciones planas y, ocasionalmente, rectangulares [1]. Los estudios que se refieren a geometrías cilíndricas son nulos o, a lo más, de carácter puramente empírico.

En este artículo se analizará la influencia que la aplicación de campos magnéticos tiene sobre la orientación de las moléculas de cristal líquido dentro de estructuras cilíndricas. Se analizarán las dos configuraciones posibles, homogénea y homeotrópica, y sobre ellas se aplicarán campos magnéticos longitudinales y transversales. El estudio presentado se ceñirá exclusivamente al caso de los cristales líquidos de tipo nemático ya que, hoy por hoy, son los candidatos más idóneos para este tipo de aplicaciones. Las generalizaciones al caso de los esmécticos y de los colestéricos son relativamente fáciles a partir del estudio presentado aquí.

II. Ecuaciones generales del realineamiento inducido por campos magnéticos, en estructuras cilíndricas

Como ya es bien conocido de la literatura de cristales líquidos [9-10], la teoría del continuo elástico se presenta en la actualidad como la más adecuada para el estudio del comportamiento de los cristales líquidos. Su aplicación al caso de la interacción campo electromagnético-moléculas de cristal líquido ha explicado una gran cantidad de fenómenos conocidos experimentalmente desde casi principios de siglo y, en particular, ha permitido explicar el comportamiento de las estructuras convencionalmente empleadas en visualizadores de calculadoras o relojes digitales, esto es, en estructuras planas. De entre los fenómenos que ha permitido explicar con toda satisfacción, y de acuerdo con los fines del presente artículo, es de señalar, por ejemplo, la predicción de un campo umbral para la obtención de realineamiento total en una estructura plana («sandwich»), tanto para el caso de ser campo eléctrico o magnético el aplicado [9]. Este campo umbral, que en ambos casos, depende inversamente de la separación entre electrodos, para el caso de campo eléc-

trico aplicado, o entre superficies externas del cristal líquido, para campo magnético, no ha sido, ni teórica ni experimentalmente estudiado para estructuras cilíndricas. Además, aplicado a estructuras planas, ha permitido conocer la configuración molecular de acuerdo con los campos aplicados y de ahí, obtener las trayectorias de un haz luminoso que se propaga a su través. Ambos hechos, extendidos al caso cilíndrico, no han sido tratados en la literatura del tema y requieren, en consecuencia, comenzar su conocimiento.

Para iniciar dicho estudio se partirá de la expresión de la densidad de energía libre para un campo magnético H aplicado según el eje x o el y , que, con un vector de definición para el director de las moléculas de cristal líquido dado por

$$n = r \operatorname{sen} \theta \cos \gamma - \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma + z \cos \theta \quad (1)$$

viene dada por

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right)^2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{r} \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \Bigg\} - \\ & - \frac{1}{2} \chi_a H^2 \begin{cases} \cos^2 \theta \\ \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 (\gamma + \phi) \end{cases} \quad \text{para } \begin{cases} \text{el eje } z \\ \text{el eje } x \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

(3)

habiendo supuesto que las tres constantes de Frank son iguales, lo que, en general, no restringe la validez de los resultados obtenidos y donde χ_a es la anisotropía magnética del material.

La energía libre, como es sabido, viene dada por

$$U = \int_v F r dr d\phi dz \quad (4)$$

de donde es posible obtener, mediante las ecuaciones de Euler-Ostrograski, la condición de primer orden para un mínimo. Se obtiene así:

$$\Delta \theta = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{\xi^2} \{ (-1) \} \right] \quad (5)$$

(6)

si el campo se aplica según el eje $\left\{ \begin{smallmatrix} z \\ x \end{smallmatrix} \right\}$ e igualmente, que

$$\Delta \gamma = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2\xi^2} \sin 2(\gamma + \phi) \end{cases} \quad \text{para} \quad \begin{cases} \text{el eje } z \\ \text{el eje } x \end{cases} \quad (7)$$

Teniendo ahora en cuenta el hecho de que $\Delta \phi = 0$, la primera ecuación puede escribirse como

$$\Delta \theta = \sin \theta \cos \theta \left[(\text{grad}(\gamma + \phi))^2 - \frac{1}{\xi^2} \begin{cases} (-1) \\ \cos^2(\gamma + \phi) \end{cases} \right] \quad \text{para el eje} \quad \begin{cases} z \\ x \end{cases} \quad (9)$$

y donde $\xi = H^{-1} (x/\chi_a)^{1/2}$ es el valor, como es habitual, de la longitud de coherencia magnética. La ecuación para $\Delta \gamma$ no sufre variaciones.

Estas ecuaciones son las ecuaciones generales para todos los casos de orientación del cristal líquido y serán aplicadas a los diferentes casos particulares de interés.

III. Realineamiento por campo magnético en estructuras homeotrópicas cilíndricas de cristal líquido

Como ya es sabido, en este caso, mediante técnicas ampliamente conocidas de la literatura del tema [1], las moléculas del nemático son obligadas a adoptar una posición ortogonal con respecto a las paredes del recipiente que las contiene. En esa situación, son posibles tres casos: a) que no exista ningún campo aplicado, b) que el campo magnético aplicado lo sea según el eje del cilindro que contiene al cristal líquido y c) que el campo aplicado sea transversal al eje del cilindro. Estos tres casos, para la configuración homeotrópica, serán los aquí estudiados.

a) $H = 0$

De la ecuación (7) se obtiene

$$\Delta \gamma = 0 \quad (11)$$

y debido al hecho de que la condición de contorno impone $\gamma = 0$

para $r = R$ (fig. 1 y alineamiento homeotrópico), la solución de la ecuación (11) es

$$\gamma = 0 \quad (12)$$

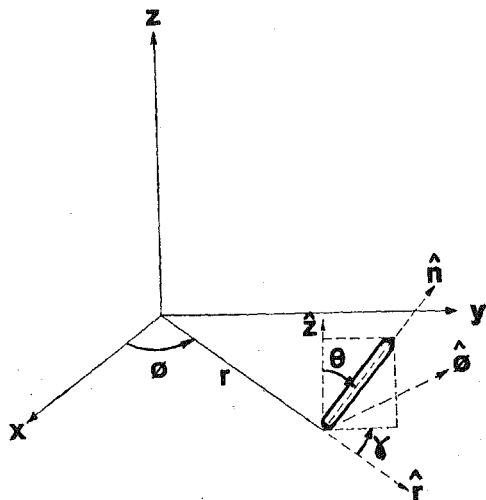


Fig. 1.—Geometría empleada para la definición del director de la molécula de cristal líquido.

en toda la estructura. Con ello, las ecuaciones (5)-(6) quedan

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2} \quad (13)$$

ya que la simetría acimutal del problema impone que $\partial^2 \theta / \partial \phi^2 = 0$. Con ello, después de integrar, queda

$$(r (\partial \theta / \partial r))^2 = \sin^2 \theta + C \quad (14)$$

y ya que $\theta = 0$ para $r = 0$, debido a la simetría acimutal, se infiere que $C = 0$.

La solución de (14) para este caso, esto es, cuando

$$\theta(r = R) = \pi/2 \quad (15)$$

es

$$(r/R)^{\pm 1} = \operatorname{tg}(\theta/2) \quad (16)$$

donde R es el radio del cilindro. Esta solución teórica ha sido obte-

nida experimentalmente por Metzler y Nabarro [11], así como por Meyer [12], por Cladis [13] y por Williams [14]. Sus muy especiales características han merecido un nombre concreto, ya usual en este campo, que es el de «escape en la tercera dimensión». Este efecto es aquel por el cual una línea de disclinación se transforma en una estructura continua sin una línea singular.

b) *Campo magnético aplicado a lo largo del eje z*

En este caso se obtiene, de la ecuación (7), la misma condición que se tenía para $H = 0$. Esto es, $\gamma = 0$ en toda la estructura. La ecuación (5) pasa ser

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (17)$$

y donde el tercer término de la izquierda se ha hecho nulo debido a la simetría acimutal de la estructura.

Esta ecuación ha sido resuelta mediante análisis numérico y los resultados aparecen en la figura 2, donde se ha representado θ en función de R/ξ .

Una aproximación a estos resultados es la función analítica

$$\lg \frac{\theta}{2} = \left[\frac{I_1(r/\xi)}{I_1(R/\xi)} \right]^{\pm 1} \quad (18)$$

donde I_1 es la función modificada de Bessel de primer grado y orden uno. Cuando H tiende hacia cero, esta expresión se aproxima a la (16).

c) *Campo magnético aplicado según el eje x*

En este caso es necesario resolver el sistema completo de ecuaciones, ya que no se presenta ninguna condición restrictiva. Pero como los planos de interés, en la mayor parte de las ocasiones, son los $x - z$ y los $y - z$, dicho sistema puede simplificarse considerablemente y obtenerse así soluciones exactas. El primero de los casos mencionados corresponde al plano según el cual se aplica el campo y el segundo, el ortogonal a él.

Con estas condiciones, en el primer caso, podemos aplicar la ecuación

$$\Delta \gamma = (\sin 2(\gamma + \phi))/2\xi^2 \quad (19)$$

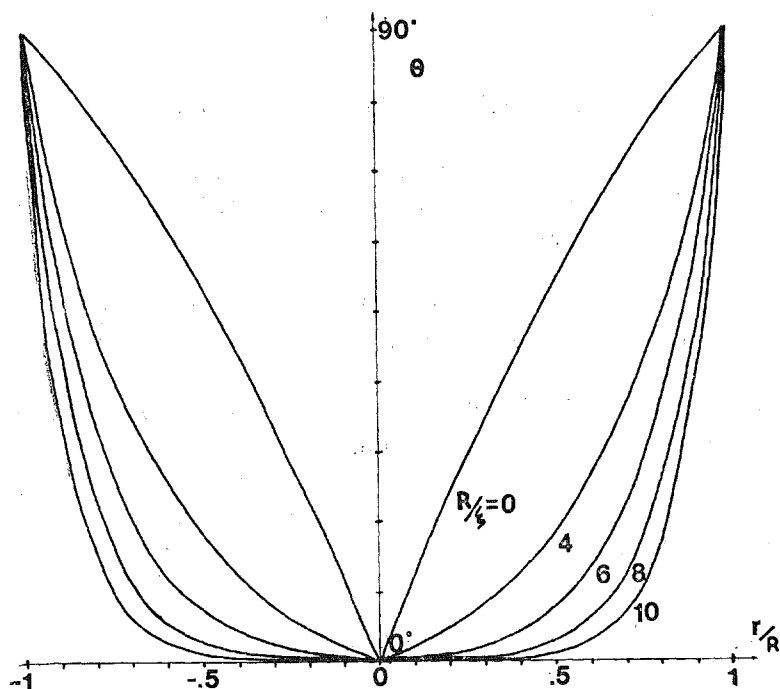


Fig. 2.—Representación de θ en función de r/R , cuando se aplica un campo magnético longitudinal, para diferentes valores de R/ξ . Las moléculas se encuentran alineadas homeotrópicamente con respecto a las paredes.

y debido al hecho de que $\Delta \phi = 0$, para valores pequeños de $\gamma + \phi$, esto es, cerca del eje x , puede escribirse como

$$\Delta (\gamma + \phi) = (\gamma + \phi)/\xi^2 \quad (20)$$

cuya solución es

$$\gamma = \left[\frac{I_0(r/\xi)}{I_0(R/\xi)} - 1 \right] \phi \quad (21)$$

de donde, para la ecuación (9), se obtiene

$$\Delta \theta = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \left[\frac{I_0(r/\xi)}{I_0(R/\xi)} \right]^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (22)$$

y en la que I_0 es la función modificada de Bessel de primer grado y orden cero. Para valores muy altos del campo magnético, esta expresión puede simplificarse a

$$\Delta \theta = -(\sin \theta \cos \theta)/\xi^2 \quad (23)$$

La solución obtenida para valores altos del campo magnético, ha sido

$$\theta \simeq (\pi/2) - K_0(r/\xi) \simeq (\pi/2) - \left(\frac{\pi \xi}{2r} \right)^{1/2} \exp(-r/\xi) \quad (24)$$

y donde K_0 es la función modificada de Bessel de segundo grado y orden cero. Estos resultados se muestran en la figura 3, donde aparece θ como función de (R/ξ) .

En el segundo caso, para el plano $y-z$, una solución particular que cumple las ecuaciones (8) y (10), es, para $\phi = \pi/2$

$$\gamma = 0 \quad y \quad \text{tg}(\theta/2) = (r/R)^{\pm 1}. \quad (25)$$

Esta solución reúne unas características muy peculiares que merecen ser analizadas con mayor detalle. Como puede apreciarse, la situación dada por ella es la misma que se tenía sin ningún campo aplicado. Esto quiere decir que las moléculas del nemático se mantienen con la misma orientación que tenían antes de aplicar el campo magnético, lo cual es, en cierta forma, sorprendente. Pero este hecho tiene una interpretación física muy concreta. Refleja el que las condiciones de contorno impuestas por el alineamiento homeotrópico en las paredes dan lugar a dos tendencias opuestas en el mismo plano. En condiciones ideales, como son las aquí tratadas, ambas fuerzas deberán ser iguales y así el plano de moléculas, como un todo, permanece inalterado. Evidentemente, en la realidad, esto casi nunca se cumplirá ya que muy pequeñas variaciones en las fuerzas moleculares de alineamiento superficial darán lugar a ondulaciones en las orientaciones de este plano.

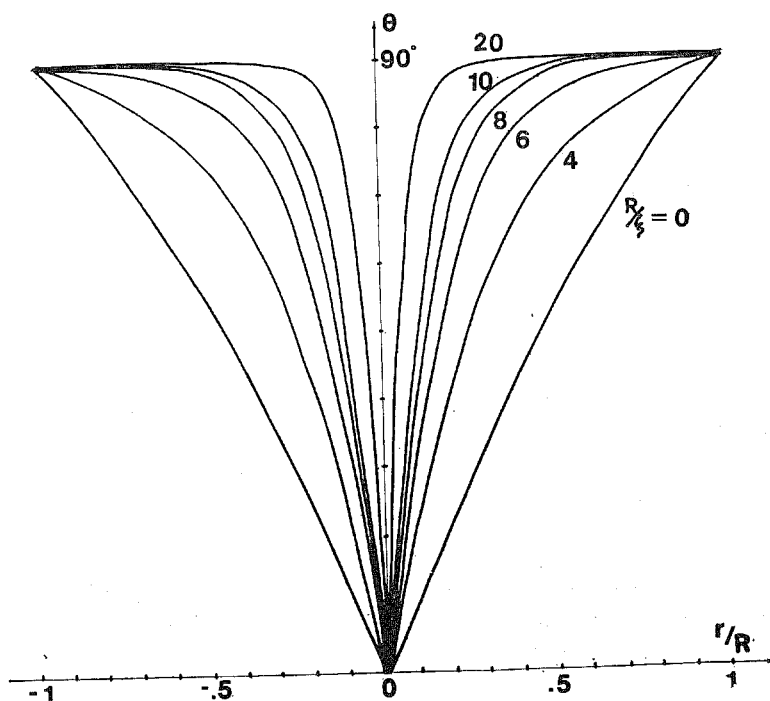


Fig. 3.—Alineamiento con un campo magnético transversal aplicado al eje del cilindro en un alineamiento homeotrópico.

IV. Realineamiento inducido por campo magnético en estructuras cilíndricas homogéneas

Las moléculas de cristal líquido se encuentran, en este caso, orientadas en las paredes del cilindro de forma paralela al eje del mismo. En consecuencia, la condición de contorno será ahora $\theta = 0$ para $r = R$. Con esto como punto de partida pueden obtenerse ya las soluciones para el caso homogéneo como se hizo para el homeotrópico. Igual que en III, los dos casos que estudiaremos son los correspondientes a campos magnéticos aplicados longitudinal y transversalmente al eje del cilindro.

Para $H = H_z$, las ecuaciones que se deberán aplicar son

$$\Delta \gamma = 0 \quad (26)$$

$$\Delta \theta = \sin \theta \cos \theta (\text{grad } (\gamma + \phi))^2 \quad (27)$$

merced, ahora, a la simetría del problema y después de unos muy sencillos cálculos se llega a que

$$\theta = 0 \quad (28)$$

para cualquier radio del capilar. Como consecuencia, las condiciones iniciales de homogeneidad se mantienen. El campo magnético tiene en este caso el efecto obvio de mantener la orientación molecular inicial y minimizar las fluctuaciones térmicas de las moléculas de nemático.

Para $H = H_x$, puede aplicarse la ecuación (19). Para pequeños valores de $\gamma + \phi$, se obtiene una expresión idéntica a (20), de la que es posible obtener

$$\Delta \theta = -\sin \theta \cos \theta / \xi^2 \quad (29)$$

como ya se había obtenido en la ecuación (23). La diferencia básica proviene ahora de las condiciones de contorno impuestas por las paredes. La solución ahora viene dada por

$$\theta \simeq A J_0(r/\xi) \quad (30)$$

cuando es posible hacer la aproximación $\sin \theta \cos \theta \simeq \theta$. J_0 es la función de Bessel de primer grado y orden cero.

Como en las paredes es obligado que sea

$$\theta = 0 \quad \text{para} \quad r = R \quad (31)$$

ha de verificarse que

$$\frac{R}{\xi} = 2,4 \quad (32)$$

valor que se corresponde con el primer cero de J_0 . Teniendo en cuenta ahora que $\xi = H^{-1} (x/\gamma_a)^{1/2}$ se obtiene

$$H_u = \frac{2,4}{R} \left(\frac{x}{\gamma_a} \right)^{1/2} \quad (33)$$

que es el valor del campo magnético umbral para conseguir realinea-

ción de las moléculas de cristal líquido cuando se encuentran en una estructura cilíndrica y con una configuración homogénea. κ es, como antes, la constante de Frank y χ_a la anisotropía magnética. Este campo umbral para estructuras cilíndricas es la primera vez que aparece reportado en la literatura del tema y tiene un contrapunto completo con el análogo para estructuras planas y cuya existencia es conocida desde casi los primeros años de estudio de los cristales líquidos.

Para valores elevados del campo magnético, se obtiene

$$\frac{d^2 \theta'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \theta'}{dr} + \theta' (-1/\xi^2) = 0 \quad (34)$$

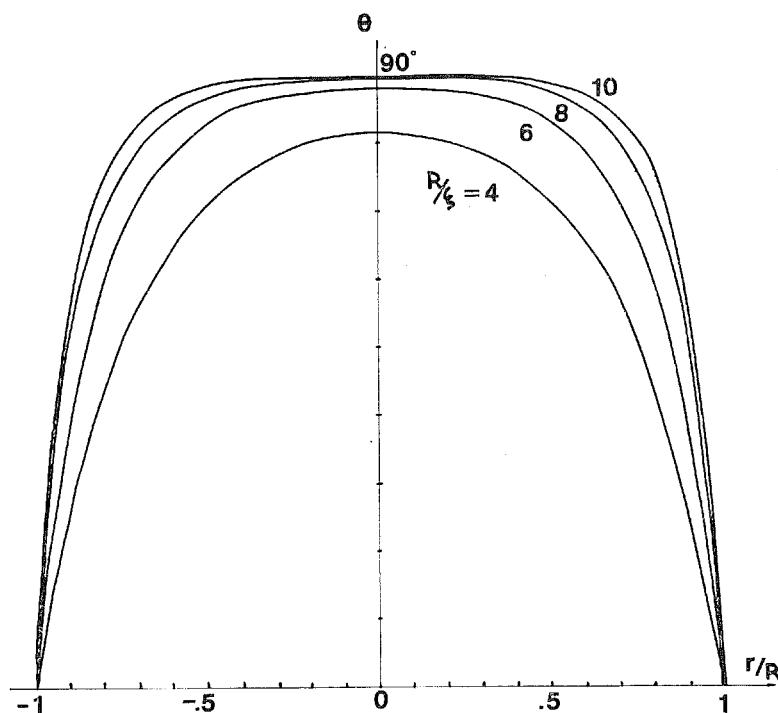


Fig. 4.—Igual a la figura 3 pero con alineamiento homogéneo.

donde $\theta' = (\pi/2) - \theta$ y ya que $\sin \theta' \cos \theta' \simeq \theta'$, la solución que se obtiene es

$$\theta \simeq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{I_0(r/\xi)}{I_0(R/\xi)} \right) \quad (35)$$

y que, como se ha dicho antes, sólo es válida para altos valores de H . El resultado aparece reflejado en la figura 4.

V. Conclusiones

En el estudio presentado se han obtenido una serie de resultados que, para el caso de cristales líquidos nemáticos en estructuras cilíndricas, no habían sido previamente publicados. A partir de la teoría del continuo elástico se ha obtenido, en primer lugar, para el caso de configuraciones homeotrópicas, el ya conocido experimentalmente escape en la tercera dimensión. Este hecho, aunque no suponiendo ninguna aportación nueva, indica la validez de los razonamientos hechos para este caso y que, en consecuencia, podrán generalizarse a otros.

Con campos magnéticos aplicados, el primer resultado de interés que se ha obtenido es la variación de orientaciones de las moléculas en el interior del cilindro, de acuerdo con el valor del campo. En el caso de campos longitudinales se han obtenido las diferentes orientaciones de los directores en función del campo magnético aplicado y de las dimensiones del cilindro, esto es, del cociente R/ξ . Para valores de este cociente superiores a 10, la estructura puede considerarse con todas sus moléculas, a excepción de las contiguas a las paredes, orientada según la dirección del campo.

Cuando el campo magnético es transversal al capilar, dos han sido las conclusiones fundamentales obtenidas. La primera es que la línea que constituye el eje del cilindro permanece con las moléculas de nemático en la posición que tenían previamente a la aplicación del campo, esto es, se mantiene el escape en la tercera dimensión que existía sin campo aplicado. Además, el plano ortogonal al campo y que contiene al eje del cilindro, permanece igualmente inalterado. Este hecho constituye un, en cierta forma, factor no esperado ya que existe un plano completo en el cual las moléculas de nemático no han sufrido alteraciones. Desde un punto de vista físico esto puede interpretarse como una región de máxima energía donde se acumula la proporcionada por el campo y, de hecho, requiere un estudio energético posterior.

Para el caso de alineamientos homogéneos el hecho más importante presentado en este trabajo es el de la existencia de un campo magnético umbral, para campos transversales, análogo al encontra-

do en estructuras planas. La importancia de este hecho queda de manifiesto cuando estas estructuras vayan a ser aplicadas en el campo de las comunicaciones ópticas como se anunciaba en I.

Por otra parte, e independientemente del tipo de alineamiento impuesto, es de señalar que, a la vista de las gráficas presentadas, el campo magnético ejerce una mayor influencia cuando es aplicado longitudinalmente que cuando lo es transversalmente. Este hecho es importante cuando estas estructuras vayan a ser aplicadas como moduladoras; la confirmación experimental ha sido encontrada por nosotros y será publicada en breve.

A partir de lo anterior varios caminos quedan abiertos. Por una parte queda la verificación empírica del plano singular encontrado en III. Este hecho puede llegar a confirmarse mediante técnicas interferométricas, análogas a las ya aplicadas para las fibras ópticas y que han sido puestas de manifiesto por el grupo de Roma de cristales líquidos. Igualmente, y este es el método adoptado parcialmente por nosotros, puede llegarse a su verificación mediante el estudio de la propagación de una radiación láser a través de dichas estructuras. Un análisis de los resultados obtenidos y una correlación con la estructura interna del material puede aseverar lo predicho por la teoría dada aquí. Este estudio ha sido en parte presentado por nosotros [15] y los resultados finales serán publicados en breve.

Los autores agradecen al señor Trell la realización de las figuras y al señor López Hernández la realización de algunos cálculos numéricos.

Este trabajo ha sido realizado con una ayuda de la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

Bibliografía

- [1] KELKER, H. y HATZ, R. (1980). Handbook of Liquid Crystals (Weinheim, Verlag Chemie).
- [2] MURIEL, M. A. y MARTÍN-PEREDA, J. A. (1980). *Optics Letters*, **5**, 494.
- [3] MURIEL, M. A. y MARTÍN-PEREDA, J. A. (1980). Annual Meeting de la Optical Society of America. Chicago, Oct.
- [4] MURIEL, M. A. y MARTÍN-PEREDA, J. A. (1980). European Conf. on Optical Systems and Applications. Utrech (Holland), Sept.
- [5] SOREF, R. (1981). *Optics Letters*, **6**, 275.

- [6] MARTÍN-PEREDA, J. A. y MURIEL, M. A. (1981). Comunicación presentada en CLEO'81. Washington, Junio.
- [7] BERTOLOTI, M., SBROLLI, L. y SCUDIERI, F. (1980). European Conf. on Optical Systems and Applications. Utrecht (Holanda), Sept.
- [8] MARTÍN-PEREDA, J. A. y MURIEL, M. A. (1981). Annual Meeting de la Optical Society of America. Kinsimee (Florida), Oct.
- [9] PRIESTLEY, E. B., WOJTOWIEZ, P. J. y SHENG, P. (1975). Introduction to Liquid Crystals (Plenum Press, N. Y.).
- [10] DE GENNES, P. G. (1974). The Physics of Liquid Crystals (Clarendon Press, Oxford).
- [11] MELZER, D. y NABARRO. (1977). *Phil. Magazine*, **35**, 907.
- [12] MEYER, R. B. (1973). *Phil. Mag.*, **27**, 405.
- [13] CLADIS, P. F. (1975). *Phil. Mag.*, **29**, 641.
- [14] WILLIAMS, C. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 90.
- [15] MURIEL, M. A. y MARTÍN-PEREDA, J. A. (1980). XVIII Reunión Bial R. S. F. Q. Burgos.